جامعة الاخوة منتوري-قسنطينة- السنة الدراسية 2018 /2019

كلية العلوم والتكنولوجيا المدة : ساعة واحدة

السنة الثانية ST

امتحان قصير المدى في مقياس الرياضيات 3

التمرين الأول(6 نقاط)

أحسب تكامل مضاعف واحد فقط من بين:

Calculer seulement **une seule intégrale double** *parmi* :

$$I = \iint_D (x + e^{-y})\, dx\, dy \quad , \qquad D = \{(x,y) \in IR^2 \;\; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$J = \iint_D x\, dx\, dy \;, D = \{(x,y) \in IR^2 \,, y \geq 0\,; 1 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$$

التمرين الثاني(9 نقاط)

1- أدرس تقارب 3 سلاسل العددية فقط التالية :

1-Etudier la nature de **3 séries numériques seulement**

1)$\sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)(n+1)}{(2n)!}$, 2)$\sum_{n\geq 0} \frac{\sin n}{3^n}$, 3)$\sum_{n\geq 0} \frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2}$, 4) $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$

2- عين ميدان متقارب للسلسلة الصحيحة التالية :

2-Donner le domaine de convergence de la série entière suivante

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

التمرين الثالث (5 نقاط)

حل المعادلة التفاضلية باستعمال السلاسل الصحيحة:

$$\begin{cases} xy'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 1; \;\; y'(0) = 1 \end{cases}$$

Corrigé type interro MATH 03
2018 - 2019

Exo 1

1

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 \leq x \leq 1 ;\ 0 \leq y \leq 1-x \}$

$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x + e^{-y})\, dy \right) dx$ 1

$I_1 = \int_0^{1-x} (x + e^{-y})\, dy$

$= xy - e^{-y} \Big]_0^{1-x}$ 1

$= x - x^2 - e^{x-1} + 1$ 1

$I = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - e^{x-1} + x \Big]_0^1$ 1

$I = e^{-1} + \frac{1}{6}$ 1

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y \geq 0 ;\ 1 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \}$

$\left.\begin{matrix} x-1 \in \mathbb{R} \\ y > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta \in [0, \pi]$ 1 $r \in [1, 2]$ $\quad \begin{cases} x-1 = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 1

$D = \{ (u,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 \leq \theta \leq \pi ;\ 1 \leq r \leq 2 \}$

$f(u,y) = x = 1 + r\cos\theta$ 0,5

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta \quad r \neq 0$ 1

$I = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi} (1 + r\cos\theta)\, r\, d\theta \right) dr$ 1

$I_1 = \int_0^{\pi} r + r^2\cos\theta\, d\theta = r\pi$ 1

$I = \int_1^2 r\pi\, dr = \boxed{\frac{3\pi}{2} = I}$ 0,5

Exo 2

ⓐ $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+2)(n+1)}{(2n)!}$ 0,25

D'Alembert س. حدود موجبة

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+3)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$ 0,75

$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4n^2} = 0 < 1$ 0,5 conv 0,25

ⓑ $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin n}{3^n}$ 0,25

س. كيفية ندرس التقارب المطلق

$\sum \left| \frac{\sin n}{3^n} \right|$ 0,25

س. حدود موجبة المقارنة

$\left| \frac{\sin n}{3^n} \right| \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n = V_n$ 0,25

$\sum \left(\frac{1}{3} \right)^n$ س. هندسية متقاربة 0,5

لأن $q = \frac{1}{3} \in]-1, +1[$

منه $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{\sin n}{3^n} \right|$ متقاربة 0,25

$\Leftarrow \sum \frac{\sin n}{3^n}$ متقاربة 0,25

ⓒ $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1 + 1/n)}{n^2}$ 0,25

س. ح. موجبة

التكافؤ $V_n = \frac{1}{n^3}$ 0,75

$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{V_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \times \frac{n^2}{n^2} = 1$ 0,25

$\alpha = 3 > 1$ 0,25 R س. متقاربة $\sum \frac{1}{n^3}$

$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1 + 1/n)}{n^2}$ متقاربة

0,25

Math 3

(d) $\sum \left(\frac{n}{n-1}\right)^2$ (0,25)

س . ح موجبة

Cauchy.

$(U_n)^{1/n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$ (1)

$\lim_{n\to+\infty}(U_n)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{(-1)}{n})^n} = \frac{1}{e^{-1}} = e$ (0,25)

$= e > 1 \Rightarrow$ div (0,25)

$\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (0,5)

$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1.$ (0,5)

$x \in]-1,+1[\Rightarrow$ conv (0,5)

$x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\Rightarrow$ div (0,5)

$x = 1$: $\left(\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\right.$ div Riemann- (0,5)

$\left.\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$

$x = -1$. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ conv (Leibniz)

$\lim V_n = 0$ (0,25)

$V_n \downarrow$ (0,5)

$D = [-1,+1[.$ (0,5)

$$\begin{cases} xy'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \ ; \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$a_0 = y(0) = 1$ (0,5)

$a_1 = y'(0) = 1.$

(a) $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ (0,75)

(b) $y' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$

(c) $y'' = \sum n(n-1) a_n x^{n-2}$

(c) $xy'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1}$ (0,25)

توحيد الأس

$y = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^{n-1} \leftarrow$ (0,5)

$y' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$

$xy'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1}$

توحيد الرتبة

$y = a_0 + \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^{n-1} \leftarrow$ (0,5)

$y' = a_1 + \sum_{n\geq 2} n a_n x^{n-1} \leftarrow$ (0,5)

$xy'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1}$

$xy'' + y' - y = 0$ (0,5)

$\sum [n(n-1)a_n + n a_n - a_{n-1}] x^{n-1} + \cancel{a_1 - a_0}$

$\Rightarrow a_n(n^2 - n + n) - a_{n-1} = 0$

$a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2}$ $n \geq 2.$ (0,5)

$a_2 = \frac{a_1}{2^2} = 1/2^2.$

$a_3 = \frac{1}{(3\times 2)^2} = \frac{1}{(3!)^2}$

$a_n = \frac{1}{(n!)^2}.$ (0,5)

$$\boxed{y(x) = 1 + x + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n!)^2} x^n}$$

(0,5)